

Programme de recherche 2005  
Financé par le Conseil Général de l'Isère

**MODELISATION DE L'IMPACT D'UN BLOC ROCHEUX SUR UN  
TERRAIN NATUREL  
APPLICATION A LA TRAJECTOGRAPHIE DES EBOULEMENTS  
ROCHEUX**

F. Bourrier (1)  
F. Nicot (1)  
F. Darve (2)

*(1) Cemagref Grenoble, Unité ETNA, BP 76 – 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France,  
(2) Laboratoire Sols Solides Structures, BP 53 – 38041 Grenoble Cedex 9, France*



<b>1. INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
1.1. CONTEXTE GENERAL .....	1
1.2. OBJECTIFS .....	2
1.3. METHODOLOGIE.....	2
<b>2. MODELISATION NUMERIQUE DE L'IMPACT D'UN BLOC SUR UN EBOULIS.....</b>	<b>3</b>
2.1. METHODE DES ELEMENTS DISCRETS (M.E.D.) .....	3
2.2. CARACTERISATION ET GENERATION DE L'EBOULIS .....	4
2.2.1. <i>Caractéristiques géométriques et mécaniques du milieu</i> .....	4
2.2.2. <i>Génération de l'éboulis</i> .....	5
2.3. SIMULATION NUMERIQUE D'UN IMPACT .....	6
<b>3. ETUDE DES ECHANGES ENERGETIQUES AU COURS DE L'IMPACT.....</b>	<b>7</b>
3.1. ECHANGES ENERGETIQUES ENTRE LE SOL ET LE BLOC .....	7
3.2. INFLUENCE DE LA DE LA TAILLE DE L'ECHANTILLON.....	8
3.3. ECHANGES ENERGETIQUES AU SEIN DU MILIEU .....	9
3.3.1. <i>Calcul des énergies relatives au milieu</i> .....	9
3.3.2. <i>Evolution des différentes énergies au cours de l'impact</i> .....	10
3.3.3. <i>Variations des différentes énergies en fonction de la distance rapport au point d'impact</i> .....	12
3.4. INFLUENCE SUR L'IMPACT DES ECHANGES ENERGETIQUES AU SEIN DU MILIEU .....	14
<b>4. DEFINITION D'UNE LOI STOCHASTIQUE D'IMPACT.....</b>	<b>16</b>
4.1. CAMPAGNE D'ESSAIS NUMERIQUES .....	16
4.1.1. <i>Protocole de simulation</i> .....	16
4.1.2. <i>Identification des simulations « non physiques »</i> .....	16
4.2. TRAITEMENT STATISTIQUE DES RESULTATS .....	18
4.3. CARACTERISATION DE LA LOI D'IMPACT STOCHASTIQUE .....	19
4.3.1. <i>Formulation de la loi d'impact stochastique</i> .....	19
4.3.2. <i>Validation de la loi d'impact</i> .....	20
4.3.3. <i>Détermination des coefficients de la loi d'impact</i> .....	21
4.4. DISCUSSION.....	22
<b>5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>24</b>
<b>6. REFERENCES.....</b>	<b>25</b>

## 1. Introduction

### *1.1. Contexte général*

La chute de blocs constitue un risque majeur dans les zones montagneuses. La protection par rapport à cet aléa peut être grandement améliorée par la prédiction des zones à risques.

L'utilisation de logiciels de trajectographie est un élément essentiel à la définition de ces zones. Les utilisateurs de ce type d'outil s'accordent à dire qu'une des principales améliorations à apporter est la mise en place d'une modélisation fine de l'interaction entre le sol et le bloc. En effet, les modèles actuels ne traduisent pas totalement la réalité des phénomènes locaux en jeu lors de l'impact.

Par ailleurs, le principe de fonctionnement des logiciels de trajectographie est souvent basé sur l'utilisation de lois déterministes ou de lois statistiques simplifiées. Etant donné la complexité du phénomène d'impact et la variabilité des configurations réelles, le développement de lois d'impact stochastiques plus élaborées semble indispensable.

En réponse à cette demande, l'objectif principal de cette étude est la caractérisation de l'impact d'un bloc rocheux sur un terrain naturel ainsi que la construction d'une loi stochastique d'interaction entre le sol et le bloc. Cette loi devra à la fois rendre compte de la réalité physique des phénomènes et être facilement implantable au sein des logiciels de trajectographie actuels.



*Figure 1 : Eboulis*

### **1.2. Objectifs**

Il est envisagé de se limiter au cas très fréquent où le sol est un éboulis (Figure 1). Dans ce cas, il a été montré que le comportement de l'impact est fortement lié au rapport entre le diamètre  $R_b$  du bloc et le diamètre moyen  $R_m$  des éléments composant le sol.

Si  $R_m/R_b \ll 1$ , le sol peut être considéré comme un milieu continu (Calvetti 1998). Par contre, lorsque  $R_m/R_b \gg 1$ , l'étude de l'impact est similaire à celle de l'interaction d'un bloc avec une dalle (Berthet-Rambaud 2004). Ces deux configurations semblent bien maîtrisées et des outils permettant de caractériser correctement l'impact dans ces cas de figure existent déjà.

Par contre, le cas où  $R_m/R_b \sim 1$  n'a encore été que très peu étudié (Laouafa & Nicot 2004). Par conséquent, le développement d'outils de caractérisation de l'impact dans cette configuration intermédiaire sera l'enjeu principal de ce travail.

### **1.3. Méthodologie**

L'objectif principal de ce travail est la caractérisation de l'impact du bloc sur l'éboulis. Dans ce cadre, l'étude numérique de l'interaction sol/bloc au cours de l'impact est menée.

L'utilisation de l'outil numérique permet, suite à une phase de développement d'un modèle numérique adapté, une étude rapide et complète des phénomènes régissant l'impact.

Cet outil offre en outre la possibilité de simuler un grand nombre d'impacts dans des conditions très différentes. Les nombreuses données issues de ces simulations peuvent alors être traitées statistiquement dans l'optique d'établir une loi d'impact stochastique.

La loi obtenue est validée par comparaison avec les modèles d'impact actuels et avec les données expérimentales issues de campagnes d'essais menées au Cemagref de Grenoble.

Les étapes de ce travail sont donc :

- Modélisation numérique de l'impact bloc/éboulis par la Méthode des Eléments Discrets
- Caractérisation d'une loi stochastique d'impact à partir des résultats numériques
- Validation des lois obtenues et intégration au sein de logiciels de trajectographie actuels

## 2. Modélisation numérique de l'impact d'un bloc sur un éboulis

### 2.1. Méthode des Eléments Discrets (M.E.D.)

L'éboulis étant un milieu granulaire non cohésif, la modélisation numérique de l'impact a été développée en utilisant la méthode des éléments discrets (logiciel : PFC2D – Itasca 1999).

La M.E.D. (Cundall & Strack 1979) permet de décrire de manière aisée la cinématique d'une collection d'objets, pouvant interagir les uns avec les autres au droit des zones de contact. Les particules générées sont soumises à des forces de contact ainsi qu'à des forces volumiques. Dans le cadre de cette étude, les actions volumiques se limitent à la force de gravité. Par ailleurs, les interactions entre particules sont régies par une loi de contact non linéaire et hypo-élastique de Hertz-Mindlin (Mindlin & Deresiewicz 1953). Et, une loi de frottement de Coulomb est également implémentée de façon à prendre en compte les dissipations frictionnelles selon la direction tangentielle des contacts (Figure 2).

Par conséquent, les équations régissant les contacts sont :

$$F_n = K_n U_n^{3/2} \text{ ave } K_n = K_n(G, \nu, R_1, R_2) \quad (1)$$

$$F_t = -\frac{\Delta U_t}{|\Delta U_t|} \min(|F_{t,el}|, |F_n \tan(\varphi)|) \text{ avec } F_{t,el} \leftarrow F_{t,el} - K(G, \nu, R_1, R_2) \Delta U_t \quad (2)$$

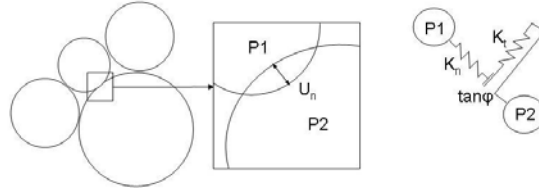


Figure 2 : Loi de contact

A chaque pas de temps (Figure 3), les forces de contact s'appliquant sur chaque particule sont calculées à partir de la position des particules. Puis, le déplacement de chaque particule est déterminé par résolution de la seconde loi de Newton par l'intermédiaire d'un algorithme explicite. Enfin, le déplacement calculé est appliqué à chaque particule de façon à définir leur position au pas de temps suivant.



Figure 3 : Principe de calcul de la M.E.D.

## 2.2. Caractérisation et génération de l'éboulis

Dans un premier temps, la modélisation du milieu est réalisée en 2 dimensions de façon à définir une méthodologie claire de caractérisation d'une loi d'impact stochastique tout en limitant le temps de calcul.

La forme des particules étant un élément déterminant, plusieurs modèles de sol composés de différents types de particules ont été construits. Deux types de particules différents sont utilisés (Figure 4) : particules sphériques et particules « clumps » (particules polygonales composées d'un agglomérat insécable de particules sphériques).

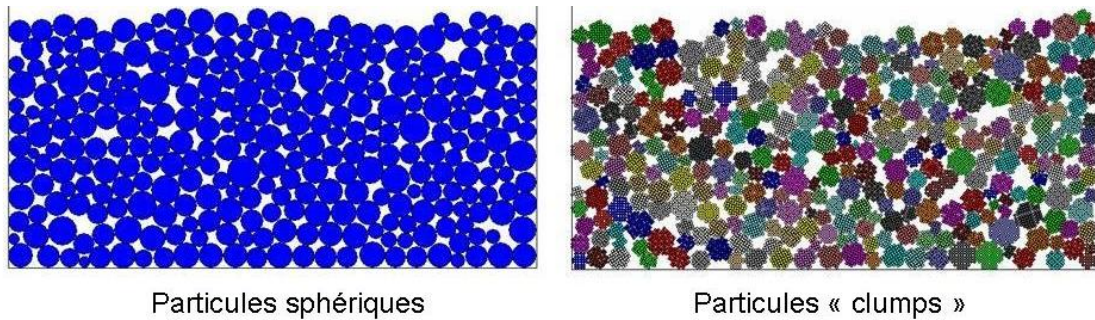


Figure 4 : Modélisation numérique du sol

### 2.2.1. Caractéristiques géométriques et mécaniques du milieu

Quel que soit le type de particule, les caractéristiques du milieu sont fixées de façon à obtenir des courbes granulométriques comparables pour tous les échantillons (Figure 6).

Le diamètre moyen des particules du milieu est de l'ordre du diamètre  $R_b$  du bloc. Le diamètre  $R_b$  est fixée à  $R_b = 0.40$  m de façon à être en accord avec la taille moyenne des blocs relevée lors d'événements réels (Azzoni et al. 1991).

Par ailleurs, pour tenir compte de la poly-dispersité des éboulis naturels, la taille des particules est déterminée de façon à obtenir une répartition volumique telle que  $V_{\max}=10V_{\min}$  (Kirkby & Statham 1975).

Les milieux composés de particules polygonales sont également caractérisés par l'élanement des particules défini par le rapport de la largeur des particules  $l_p$  sur leur longueur  $L_p$ . Deux milieux types sont ainsi générés : un milieu composés de particules d'élanement 1 et un milieu composé de particules d'élanement compris entre 1 et 4.

Sol N°	1	2	3
Type de particules	Sphériques	Polygonales $l_p/L_p=1$	Polygonales $0,25 < l_p/L_p < 1$
Dimension moyenne	$D_{\text{mean}}=0,65\text{m}$	$L_{\text{mean}}=0,58\text{m}$	$L_{\text{mean}}=0,8\text{m}$
Porosité	$n=0,165$	$n=0,182$	$n=0,189$

Figure 5 : Caractéristiques des échantillons de sol

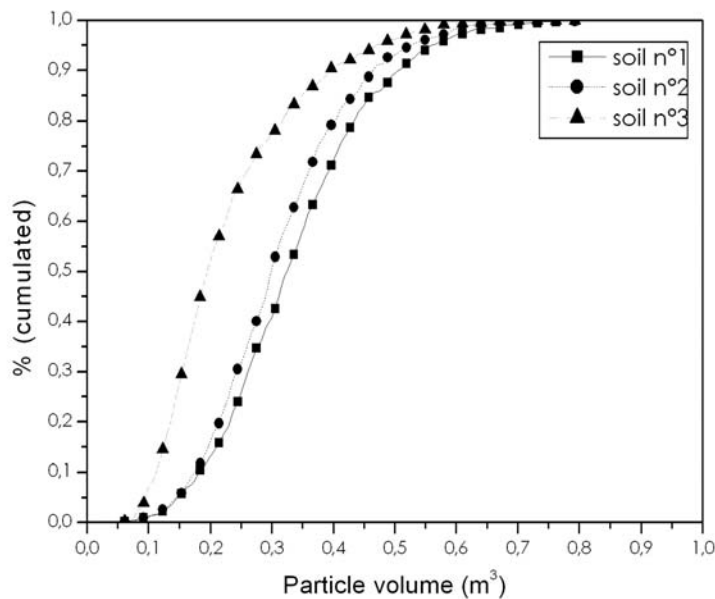


Figure 6 : Courbe granulométrique des échantillons de sol

Il est important de noter que la porosité n'est pas, dans ce cas, un paramètre contrôlé. En effet, cette grandeur est fortement liée au mode de génération des particules(cf. § 2.2.2) qui est choisi ici de façon à respecter le fait que la majorité des éboulis sont créés suite à des processus gravitaires. Par ailleurs, la différence de porosité entre les milieux générés (Figure 5) est due au fait que cette grandeur est fortement liée à la courbe granulométrique du milieu ainsi qu'à la forme des pierres le composant.

Enfin, la complexité du contact réel entre particules de l'ébouli ne permettant pas une évaluation expérimentale satisfaisante des paramètres locaux de la loi de Hertz-Mindlin, les valeurs de ces grandeurs (module de cisaillement, coefficient de Poisson, angle de frottement local) sont définies en s'appuyant sur les données issues de la littérature existante (Goodman 1980) :

- module de cisaillement :  $G = 40 \text{ GPa}$
- coefficient de Poisson :  $\nu = .25$
- angle de frottement local :  $\varphi = 30$

### 2.2.2. Génération de l'ébouli

L'échantillon (Figure 7) est construit par génération aléatoire de particules de dimensions réparties selon une distribution normale puis par dépôt sous gravité des particules jusqu'à atteinte d'un état d'équilibre (voir par exemple Bagi 2005).

Les particules du sol sont générées assez loin les unes des autres selon une orientation aléatoire puis déposées sous gravité jusqu'à atteinte d'un état d'équilibre.

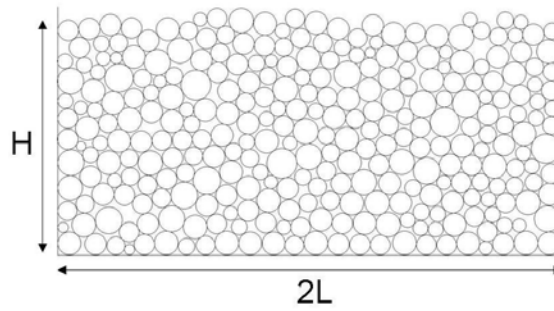


Figure 7 : Echantillon de sol

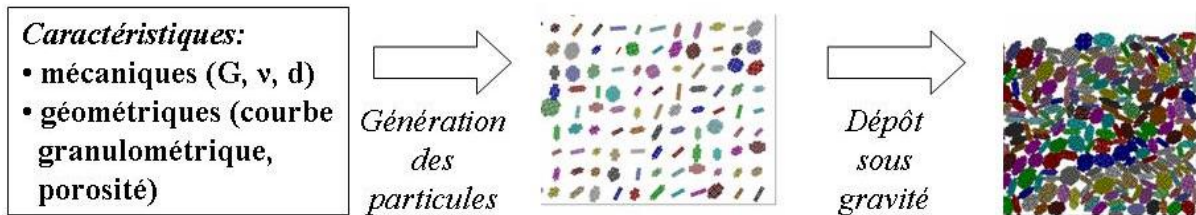


Figure 8 : Principe de génération des échantillons

Les résultats présentés par la suite sont exclusivement issus de simulations réalisées pour un milieu composé de particules sphériques. L'influence de la forme des particules sur le phénomène d'impact sera étudiée ultérieurement.

### 2.3. Simulation numérique d'un impact

Le début de l'impact est défini comme étant l'instant de la première interaction entre le milieu et le projectile (premier pas de temps de la simulation). Et, la fin de l'impact est le moment où la composante normale de la vitesse du bloc atteint son apogée (Figure 9). Cet instant correspond dans la majorité des cas à l'instant de la dernière interaction entre le milieu et l'impactant. Les vitesses incidentes et restituées du bloc sont relevées au début et à la fin de l'impact.

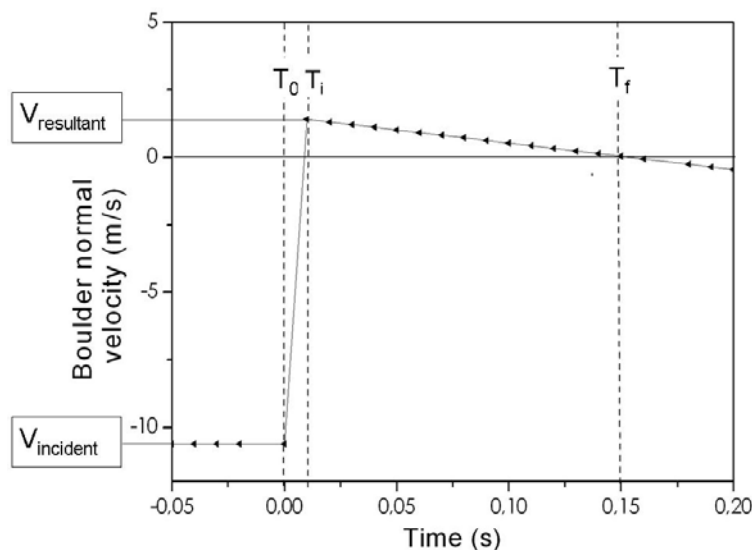


Figure 9 : Définition du début et de la fin de l'impact



La simulation d'un impact débute par le chargement du milieu généré auparavant. Puis, l'impactant est placé en contact avec l'échantillon de façon à définir précisément le point d'impact initial. Et, les conditions cinématiques initiales (vitesse, vitesse de rotation et angle d'incidence) sont appliquées au bloc (Figure 10).

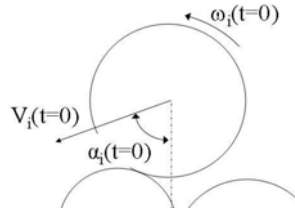


Figure 10 : Conditions initiales d'impact du bloc

### 3. Etude des échanges énergétiques au cours de l'impact

Le cas étudié est celui pour lequel le milieu et le bloc sont de taille environ égale ( $R_{\text{mean}} \sim R_b$ ). Les échanges énergétiques entre le bloc et le milieu sont étudiés pour un impact donné. Cependant, quelles que soient les conditions initiales, les phénomènes mis en évidence par ces simulations sont identiques ; seule leur influence relative varie.

Pour cette étude, les conditions d'impact sont :

- Rayon du bloc  $R_b = 0,8\text{m}$
- Vitesse incidente du bloc :  $V_b(t=0) = 20\text{m/s}$
- Angle d'incidence du bloc :  $\alpha(t=0) = 45^\circ$
- Vitesse de rotation incidente du bloc :  $\omega(t=0) = 0\text{ rad/s}$
- Dimensions de l'échantillon :  $L=16\text{m}$  ;  $H=8\text{m}$
- Point d'impact identique pour toutes les simulations
- Milieu identique pour toutes les simulations

#### 3.1. Echanges énergétiques entre le sol et le bloc

Le but de l'étude étant la détermination des transferts d'énergie entre le bloc et le sol, le système est divisé en 2 sous-systèmes : le bloc et le sol.

Par ailleurs, les variations d'énergie potentielle du bloc étant négligeables, seules les évolutions de l'énergie cinétique du bloc et de l'énergie dissipée par friction entre le bloc et le sol sont étudiées.

L'énergie cinétique du bloc  $E_{c,b}$  est calculée à chaque pas de temps de la façon suivante :

$$E_{c,b} = \frac{1}{2} M_b V_b^2 + \frac{1}{2} I_b \omega_b^2 \quad (3)$$

-  $M_b$  : masse du bloc  
-  $I_b$  : moment d'inertie du bloc

Et, l'énergie totale dissipée par friction lors des interactions sol/bloc  $E_{f,b}$  est calculée à chaque pas de temps de façon incrémentale :

$$E_{f,b} \leftarrow E_{f,b} - \sum_{\text{contacts}_{\text{sol}/\text{bloc}}} F_t \left( \Delta u_t + \frac{\Delta F_t}{K_t} \right) \quad (4)$$

Comme les simulations montrent que les variations des énergies potentielles du sol et du milieu sont négligeables, le bilan énergétique de l'impact est :

$$\Delta E_{c,b} + \Delta E_{c,m} + E_{f,b} = 0 \quad (5)$$

-  $\Delta E_{c,b}$  : variation d'énergie cinétique du bloc  
-  $\Delta E_{c,m}$  : variation d'énergie cinétique du milieu

Quelles que soient les conditions initiales, l'échange énergétique entre le sol et le bloc est très fortement dissipatif ( $E_{f,b}/E_{c,b}(t=0) \sim 0.4$ ). Par ailleurs,  $E_{f,b}$ ,  $\Delta E_{c,b}$  et  $-\Delta E_{c,m}$  sont du même ordre de grandeur.

### 3.2. Influence de la de la taille de l'échantillon

Pour étudier l'influence de la taille de l'échantillon de sol, nous avons réalisé plusieurs essais d'impacts sur un milieu composé de particules sphériques libres (particules rouges) ou totalement fixes (c'est à dire ayant toutes les composantes de leur vitesse nulles au cours de la simulation - particules bleues). Cette configuration permet de conserver les mêmes conditions d'impact tout en modifiant la taille de l'échantillon : LxH (Figure 11).

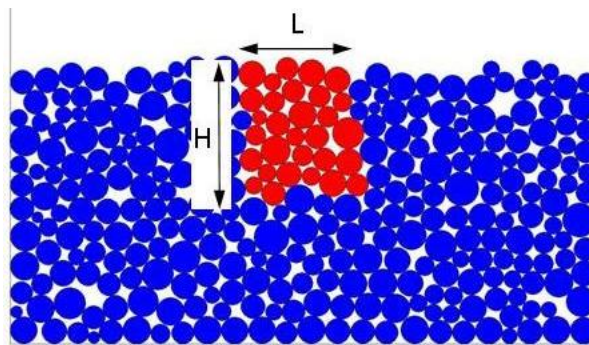


Figure 11 : Milieu réduit

Le tracé de l'évolution de l'énergie cinétique du bloc au cours de l'impact pour des conditions initiales identiques en faisant varier la taille de l'échantillon montre clairement l'influence de ce paramètre sur l'impact.

En effet, si l'échantillon est trop petit pour permettre une déformation du milieu (ici, si L et H sont inférieurs à 3m), l'échange énergétique entre le bloc et le milieu est moins important. Cet échange est même nul lorsque le milieu est rigide.

Par ailleurs, la taille minimale d'échantillon permettant de s'affranchir de l'influence de ce paramètre est déterminée pour ce cas de figure: dès que les variations d'énergie lors de

l'impact restent constantes quelle que soit la taille de l'échantillon (ici, si L et H sont supérieurs à 3m), cela signifie que celle-ci n'a plus d'influence sur l'impact (Figure 12).

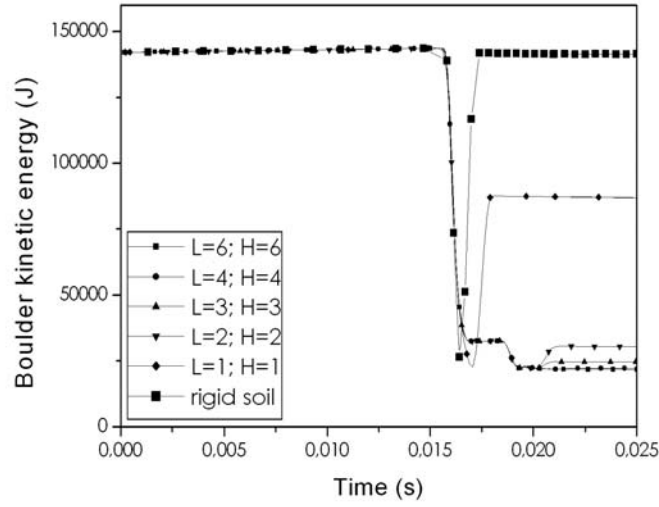


Figure 12 : Evolution de l'énergie cinétique du bloc

### 3.3. Echanges énergétiques au sein du milieu

#### 3.3.1. Calcul des énergies relatives au milieu

L'énergie totale du milieu  $E_{t,m}$  à un instant donné peut être décomposée de la façon suivante :

$$E_{t,m} = E_{c,m} + E_{d,m} + W_{p,m} \quad (6)$$

- $E_{c,m}$  : énergie cinétique
- $E_{d,m}$  : énergie de déformation
- $W_p$  : variation d'énergie potentielle

Les simulations montrent que  $W_p$  est négligeable devant  $E_{c,m}$  et  $E_{d,m}$ .

L'énergie cinétique du sol est obtenue par la relation :

$$E_{c,m} = \sum_{particules} \left( \frac{1}{2} M_p V_p^2 + \frac{1}{2} I_p \omega_p^2 \right) \quad (7)$$

- $M_p$  : masse d'une particule
- $I_p$  : moment d'inertie d'une particule
- $V_p$  : vitesse d'une particule
- $\omega_p$  : vitesse de rotation d'une particule

L'énergie déformation est, quant à elle, calculée de façon itérative par la relation :

$$E_{d,m} \leftarrow E_{d,m} + \sum_{contacts} \left( F_n \Delta U_n + \frac{|F_t \Delta F_t|}{K_t} \right) \quad (8)$$

- $\Delta U_n$  : variation de l'interpénétration normale des 2 particules

Et, l'énergie totale dissipée dans le milieu  $E_{f,m}$  est, elle aussi, calculée de façon itérative :

$$E_{f,m} \leftarrow E_{f,m} - \sum_{contacts} F_t \left( \Delta u_t + \frac{\Delta F_t}{K_t} \right) \quad (9)$$

Il est intéressant de noter que  $E_{f,m}$  et  $E_{d,m}$  incluent les valeurs  $E_{f,b}$  et  $E_{d,b}$  : ces énergies étant calculées par sommation sur les contacts du milieu, les contacts bloc/milieu y sont répertoriés. Enfin, le principe de conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$E_{t,m} + E_{f,m} + E_{c,b} + W_p = \text{constante} \quad \forall t \quad (10)$$

### 3.3.2. Evolution des différentes énergies au cours de l'impact

Les simulations montrent que, entre le début et la fin de la simulation, les variations d'énergie potentielle et d'énergie élastique de déformation sont négligeables. Cela revient à dire que le tassement du milieu lors de l'impact est faible dans ce cas.

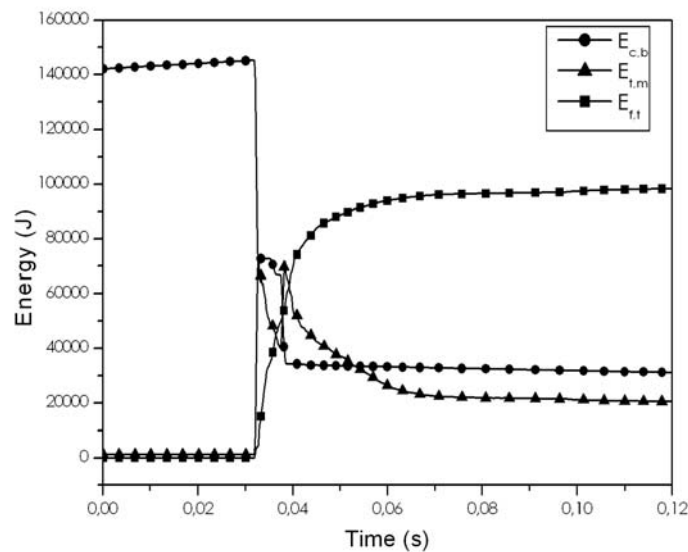


Figure 13 : Evolution des énergies caractérisant l'interaction sol/bloc

Par ailleurs, la quantité d'énergie dissipée par frottement dans le milieu est forte. Cette dissipation a lieu essentiellement durant un court laps de temps après l'impact (Figure 13).

D'autre part, comme le temps d'interaction sol/bloc est très court, la variation d'énergie cinétique du bloc est très rapide. Au contraire, l'énergie du milieu décroît plus lentement sous l'effet de la dissipation liée à l'interaction entre les particules (Figure 13).

Les différentes énergies liées au milieu ne décroissent pas de la même façon :

- l'énergie de déformation subit une très forte variation durant un court laps de temps (Figure 14),

- l'énergie cinétique décroît tout d'abord fortement et de manière identique à l'énergie de déformation puis beaucoup plus lentement (Figure 14).

Ces résultats laissent supposer que le mode principal de transmission d'énergie dans le milieu est une onde de choc qui se propage le long des chaînes de forces du milieu.

En effet, l'interpénétration au droit des contacts situés au voisinage du point d'impact est très importante dès le début de l'impact. Cela induit une augmentation rapide de l'énergie de déformation puis une diminution rapide de celle-ci par dissipation frictionnelle et transmission des efforts aux couches inférieures du milieu avec mise en mouvement des particules et, donc, augmentation rapide de l'énergie cinétique du milieu.

Ce mode de transmission de l'énergie explique le fait que l'évolution de l'énergie de déformation et cinétique sont identiques au cours des premiers instants de l'impact.

Il est également important de noter qu'une « énergie cinétique résiduelle » reste présente dans le milieu car, aucun amortissement n'étant introduit dans le modèle, les particules continuent à s'entrechoquer une fois que l'onde de choc s'est propagée. Cela explique la décroissance plus lente dans un second temps de l'énergie cinétique.

Les fortes variations de l'énergie cinétique du bloc et de l'énergie de déformation du milieu mettent en évidence un échange énergétique rapide entre le bloc et le sol. On peut supposer que cet échange est également localisé au niveau du point d'impact. Cela se traduit certainement par une forte variation des diverses énergies du milieu au voisinage du point d'impact durant un laps de temps relativement court, puis, par la transmission d'une partie de cette énergie aux couches plus éloignées du point d'impact.

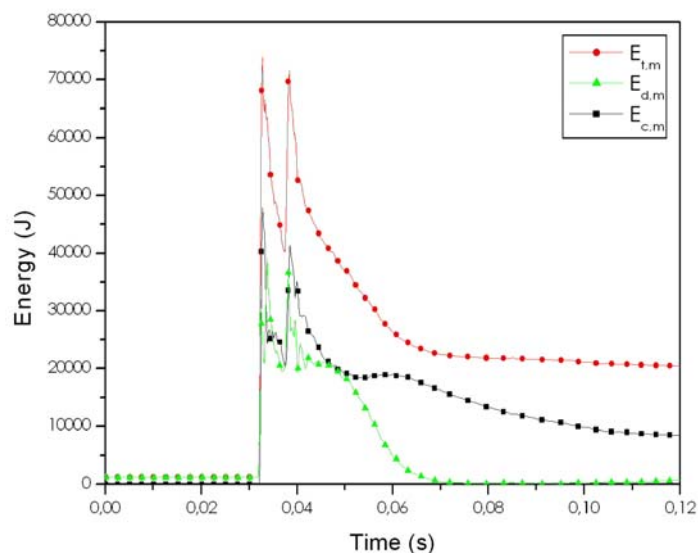


Figure 14 : Evolution des énergies liées au milieu

### 3.3.3. Variations des différentes énergies en fonction de la distance rapport au point d'impact

Afin de vérifier l'hypothèse que le transfert d'énergie s'effectue tout d'abord au niveau du point d'impact puis s'étend à l'ensemble du milieu, un calcul de l'évolution des énergies du milieu (Figure 16) au sein d'échantillons en forme de couronnes concentriques centrées sur le point d'impact est mené (Figure 15).

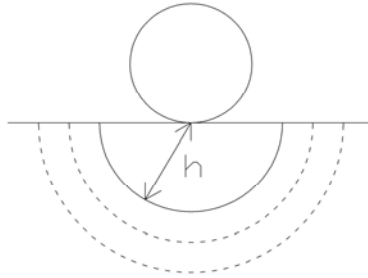


Figure 15 : Définition de « couronnes concentriques » de calcul des énergies

Quelle que soit la couronne de calcul, l'énergie de déformation varie très rapidement avec une amplitude marquée (Figure 17). Par ailleurs, le pic d'énergie est décalé en fonction de la distance au point d'impact. Cela montre clairement l'existence d'une zone de compression des contacts localisée initialement au point d'impact et se déplaçant au cours du temps vers l'intérieur du milieu. La vitesse de cette onde de compression est de l'ordre de 500m/s quelle que soit la valeur de  $h$  bien qu'on observe un léger ralentissement lorsqu'on s'éloigne du point d'impact. En effet, la vitesse de propagation est liée à la période d'interpénétration des particules. Et, comme la loi de Hertz-Mindlin est non linéaire, cette période est fonction de la vitesse initiale des particules.

L'énergie de déformation peut être décomposée en deux grandeurs : une liée à l'effort normal de contact  $E_{d,m,n}$  et une liée à l'effort tangentiel  $E_{d,m,t}$ . Les résultats montrent que la composante liée à l'effort normal est largement supérieure à celle liée à l'effort tangentiel :  $E_{d,m,n} \gg E_{d,m,t}$ . Par conséquent, la zone de compression est principalement due à l'effort normal de contact.

L'évolution de l'énergie cinétique sur chaque couronne de calcul (Figure 18) présente elle aussi un pic d'intensité lié à la présence de la zone de compression car la correspondance temporelle entre les pics d'énergie cinétique et d'énergie de déformation est très marquée. Par ailleurs, une partie de l'énergie cinétique perdue après le passage de la zone de compression. Cela peut s'expliquer par le mouvement vibratoire des particules car aucun amortissement n'est introduit dans le modèle.

Enfin, on observe une chute du nombre de coordination sur chaque couronne lors du pic de compression (Figure 19). Cela tend à montrer que la compression de la zone frontale est si importante qu'elle provoque un détachement des contacts en aval de celle-ci : localement, les particules se déplacent très rapidement dans le sens de propagation de l'énergie sans que le milieu ne soit assez chargé initialement pour conserver sa cohésion.

Il y a donc fluidisation du milieu en aval de la zone de compression. Ce phénomène a déjà été observé sur des colonnes de billes de façon expérimentale et numérique ainsi que sur des milieux granulaires bidimensionnels (Hostler & Brennen 2005).

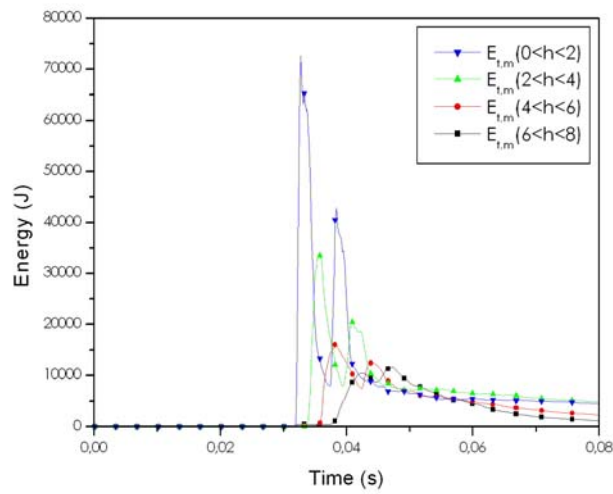


Figure 16 : Energie totale du milieu au sein de couronnes concentriques

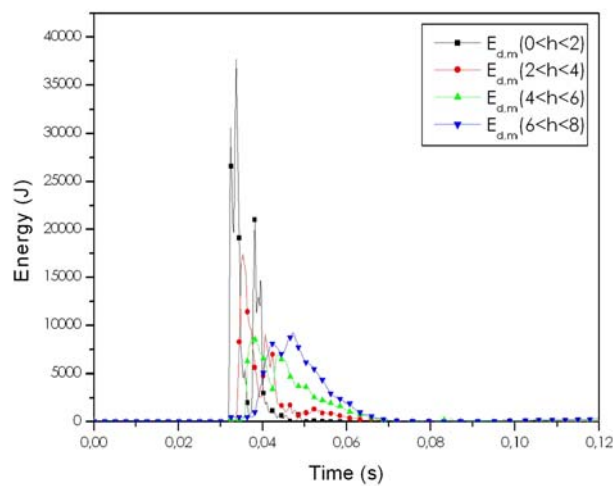


Figure 17 : Energies de déformation au sein de couronnes concentriques

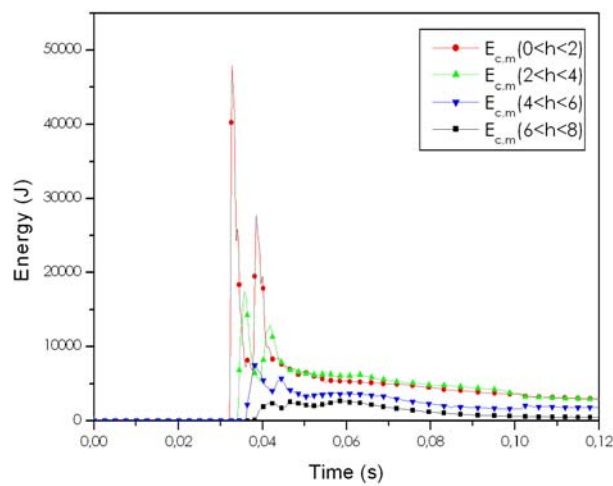


Figure 18 : Energies cinétiques au sein de couronnes concentriques

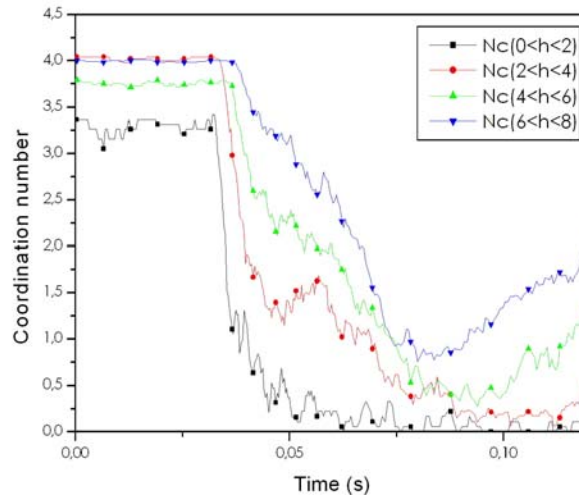


Figure 19 : Nombre de coordination au sein de couronnes concentriques

La propagation de l'énergie au sein du milieu s'effectue donc par génération d'une forte zone de compression locale au niveau du point d'impact. Puis, par propagation de cette zone de compression au sein du milieu dans toutes les directions.

La rapide décroissance du pic d'énergie de déformation et d'énergie cinétique sur chaque couronne de calcul met en évidence le caractère local de la propagation de la zone de compression.

Par ailleurs, la chute du nombre de coordination lors de la phase de compression au niveau d'une couronne vient étayer ce résultat.

Il est aussi intéressant de noter que la transmission de l'énergie n'est pas totale. L'énergie au sein d'une couronne à l'instant  $t$  est répartie à l'instant  $t+\Delta t$  en :

- énergie transmise à la couronne suivante
- énergie conservée au sein de la couronne
- énergie dissipée principalement au moment du passage du front d'onde

Ce phénomène implique une diminution de l'énergie transmise au milieu amont en fonction de la distance au point d'impact. Cela montre qu'il existe un rayon d'action du phénomène d'impact au-delà duquel le milieu n'est pas perturbé. La taille de ce rayon d'action varie fortement en fonction des conditions initiales d'impact.

#### **3.4. Influence sur l'impact des échanges énergétiques au sein du milieu**

Les échanges énergétiques au cours de l'interaction entre le bloc et le sol se divisent en trois phases. L'énergie cinétique incidente du bloc est tout d'abord partiellement répartie entre une énergie transmise au milieu, une énergie dissipée par frottement et une énergie conservée par le bloc. L'énergie transmise au sol se propage ensuite du point d'impact vers l'intérieur de l'échantillon (Hostler & Brennen 2005). Cette énergie est enfin réfléchiée sur les parois de l'échantillon et se diffuse alors vers la surface du sol.



La répartition initiale entre énergie transmise, conservée et dissipée ainsi que la transmission et la dissipation d'énergie au sein du milieu sont fortement liées à l'arrangement local des particules et au coefficient de frottement car les processus de dissipation sont essentiellement frictionnels.

Le rapport entre le temps d'impact et la durée des diverses phases d'échanges énergétiques définit les phénomènes prépondérants au cours de l'impact.

Deux modes d'impact peuvent être clairement identifiés en fonction de la possibilité de restitution au bloc de l'énergie réfléchie sur le fond des parois. Si cette restitution n'a pas lieu, l'énergie nécessaire au rebond du bloc est essentiellement fournie au cours de l'échange énergétique initial entre le bloc et le sol. Dans le cas contraire, le rebond est essentiellement dû au transfert d'énergie réfléchie du sol vers le bloc.

Le mode d'impact dépend essentiellement de l'énergie cinétique incidente du bloc, de l'arrangement local des particules, du coefficient de frottement et de la taille de l'échantillon.

Dans le cadre de l'étude ( $R_m \sim R_b$ ), le mode d'impact dominant est le premier décrit. Néanmoins, il est nécessaire que la profondeur de l'échantillon soit assez grande pour que l'énergie réfléchie sur les parois n'atteigne pas le bloc avant la fin de l'impact ou se dissipe avant d'arriver au niveau du point d'impact.

## 4. Définition d'une loi stochastique d'impact

### 4.1. Campagne d'essais numériques

La définition d'une loi statistique d'impact pour un type de bloc et de milieu donnés nécessite la réalisation de nombreuses simulations d'impact.

#### 4.1.1. Protocole de simulation

Une série de simulations pour un type de bloc et un milieu donnés est réalisée en faisant varier les conditions initiales cinématiques du bloc ainsi que le point d'impact.

Les conditions initiales cinématiques sont totalement définies par l'amplitude de la vitesse incidente, l'angle incident et la vitesse de rotation incidente. L'analyse de cas réels de chutes de blocs permet de définir le domaine variation de chacune de ces grandeurs :

- $5 \text{ m/s} < V(t=0) < 30 \text{ m/s}$
- $0^\circ < \alpha (t=0) < 90^\circ$
- $-6 \text{ rad/s} < \omega (t=0) < 6 \text{ rad/s}$

Etant donné la forte variabilité du phénomène d'impact, il est nécessaire de réaliser 15000 simulations d'impact pour chaque milieu. Cela correspond au nombre minimal assurant une convergence des résultats statistiques.

Cela revient à réaliser des essais en 100 points du milieu et pour 150 conditions cinématiques initiales différentes pour chaque point (5 vitesses, 5 vitesses de rotation et 6 angles incidents différents).

Par ailleurs, la taille de l'échantillon doit être déterminée précisément de façon à supprimer l'influence des parois de l'échantillon sur le phénomène d'impact. Des simulations d'impact sur plusieurs échantillons de tailles différentes (cf. § 3.2) montrent qu'une taille minimum est nécessaire pour supprimer l'influence des parois. Cette condition est remplie si les parois sont situées à plus de  $8R_m$  (3m dans notre cas) du point d'impact.

#### 4.1.2. Identification des simulations « non physiques »

La campagne de simulation fournit un nombre élevé de résultats. Cependant, tous ces résultats ne sont pas réalistes.

En effet, certains points d'impact simulés lors des essais ne peuvent pas être atteints sur le terrain car, dans ce cas, bloc rencontre un obstacle au cours de sa trajectoire avant d'atteindre le point visé. Il y a masquage du point en question par une autre particule du milieu (Figure 20).

Ainsi, pour un angle d'incidence donné, certains points du milieu sont masqués. Il convient donc de détecter, pour chaque angle d'incidence, les points concernés par ce phénomène. Les résultats issus des simulations correspondantes seront écartés lors du traitement statistique.

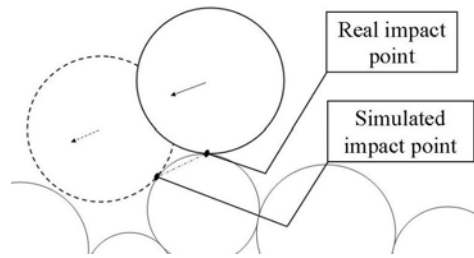


Figure 20 : Phénomène de masquage

Pour détecter les points masqués pour une incidence et un milieu donnés, une simulation de lâcher de bloc d'une hauteur donnée avec une incidence donnée est effectuée. En faisant varier la localisation initiale du bloc, l'ensemble des points d'impact possibles pour chaque incidence initiale est balayé (Figure 21).

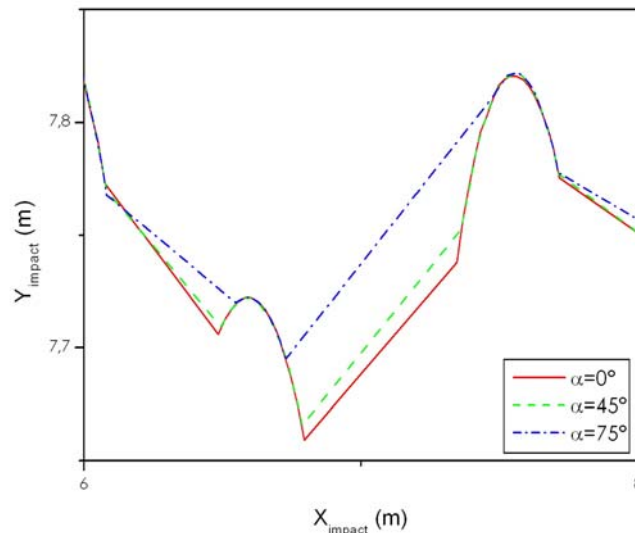


Figure 21 : Points d'impacts en fonction de l'incidence

L'ensemble des points réalistes pour une incidence donnée étant défini, chaque point de simulation est alors testé et, ainsi, défini comme étant réaliste ou non. Si, pour un point donné, une incidence est définie non réaliste, tous les angles d'incidence supérieurs à cette valeur seront non réalistes en ce point.

Il est à noter que, pour une incidence normale ( $\alpha(t=0)=0$ ), tous les points simulés sont réalistes. En effet, la méthode de mise en place du bloc lors des simulations est équivalente à un lâcher de bloc suivi de l'application des conditions initiales au moment du premier contact bloc/sol.

Suite à cette analyse, il est possible de définir, pour chaque point d'impact, le nombre d'incidences réalistes. Les simulations non physiques sont ainsi détectées et seront écartées lors du traitement des données.

#### 4.2. Traitement statistique des résultats

Les résultats issus des simulations numériques sont traités de façon à définir une loi d'impact stochastique entre les vitesses incidentes et restituées du bloc. La formulation générale de cette loi est :

$$\begin{pmatrix} V_{xr} \\ V_{yr} \\ \Omega_r \end{pmatrix} = \tilde{f} \left( \begin{pmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ \Omega_i \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

Avec  $\tilde{f}$  = opérateur stochastique;  $V_{xr}$  = composante tangente de la vitesse réfléchie;  $V_{yr}$  = composante normale de la vitesse réfléchie;  $\Omega_r$  = vitesse de rotation réfléchie;  $V_{xi}$  = composante tangente de la vitesse incidente;  $V_{yi}$  = composante normale de la vitesse incidente;  $\Omega_i$  = vitesse de rotation incidente.

En supposant l'opérateur stochastique suffisamment régulier, il est possible de l'approximer par son développement en série entière.

En outre, comme les phénomènes en jeu au cours de l'impact sont qualitativement les mêmes quel que soit le point d'impact, un modèle statistique hiérarchique est développé. Ce modèle permet de déterminer les coefficients du développement en série de l'opérateur stochastique en chaque point  $p$  et de déterminer une loi statistique reliant ces coefficients quel que soit le point d'impact.

Le modèle de traitement statistique des données est donc :

$$Re_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(p) In_j + e_i \quad \text{avec } i \in [1,3]; p \in [1,M] \quad (12)$$

avec  $Re_i = i^{\text{e}}$  composante du vecteur des quantités réfléchies;  $In_j = j^{\text{e}}$  composante du vecteur des quantités incidentes;  $e_i$  = différence entre les valeurs simulées et les valeurs estimées.

Les coefficients  $a_{ij}(p)$  sont constants pour un point d'impact donné  $p$  et leur variabilité d'un point à un autre est décrite par une loi normale  $N(m_{ij}, \sigma_{ij})$  de moyenne  $m_{ij}$  et d'écart type  $\sigma_{ij}$ .

La qualité des différents modèles stochastiques est évaluée par le rapport  $R_i$  entre la variabilité expliquée par le modèle et la variabilité totale des résultats issus des simulations. Le rapport  $R_i$  varie entre 0 et 100%. Si  $R_i = 100\%$ , la totalité de la variabilité des résultats est expliquée par le modèle.

La formulation de la loi de traitement statistique de l'impact varie fortement en fonction de la formulation des vecteurs  $Re$  et  $In$ . Le choix de ces vecteurs conditionne le nombre de paramètres explicatifs du modèle.

Par exemple, si les vecteurs sont définis de la façon suivante :

$$Re = \begin{bmatrix} V_{xr} \\ V_{yr} \\ R_b \Omega_r \end{bmatrix} \text{ et } In = \begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ R_b \Omega_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

Cela conduit à la définition de la loi d'impact stochastique d'ordre 1 suivante :

$$\begin{bmatrix} V_{xr} \\ V_{yr} \\ R_b \Omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \\ R_b \Omega_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 4.3. Caractérisation de la loi d'impact stochastique

#### 4.3.1. Formulation de la loi d'impact stochastique

Pour définir la loi d'impact stochastique, il est tout d'abord nécessaire de déterminer la formulation générale de la loi d'impact c'est-à-dire l'ordre minimal du développement en série entière de l'opérateur stochastique permettant de décrire le comportement du bloc de façon précise et concise.

Plusieurs modèles statistiques d'impact correspondant à un ordre croissant de ce développement en série entière sont comparés par l'intermédiaire du coefficient R défini précédemment qui caractérise le pourcentage de données expliqué par le modèle. Le nombre de paramètres nécessaire à la définition complète du modèle est lui aussi pris en compte de façon à sélectionner le modèle d'impact assurant le meilleur compromis en termes de précision et de concision.

Les résultats montrent que le modèle d'impact stochastique d'ordre 1 est le plus adapté car il conduit à une qualité satisfaisante (84% des données expliquées par le modèle en moyenne) pour un nombre de paramètres réduits (Figure 22).

	<b>I<sub>n</sub> vector</b>	<b>a<sub>ij</sub> number</b>	<b>mean(R<sub>i</sub>)</b>
<b>1<sup>st</sup> order model</b>	<b>(V<sub>xi</sub>, V<sub>yi</sub>, R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>)'</b>	<b>9</b>	<b>0,840</b>
<b>1<sup>st</sup> order model + 1<sup>st</sup> coupling term</b>	<b>(V<sub>xi</sub>, V<sub>yi</sub>, R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>, V<sub>xi</sub>V<sub>yi</sub>)'</b>	12	0,895
<b>1<sup>st</sup> order model + coupling terms</b>	<b>(V<sub>xi</sub>, V<sub>yi</sub>, R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>, V<sub>xi</sub>V<sub>yi</sub>, V<sub>xi</sub>R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>, V<sub>yi</sub>R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>)'</b>	18	0,904
<b>2<sup>nd</sup> order model</b>	<b>(V<sub>xi</sub>, V<sub>yi</sub>, R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>, V<sub>xi</sub>V<sub>yi</sub>, V<sub>xi</sub>R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>, V<sub>yi</sub>R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>, V<sub>xi</sub><sup>2</sup>, V<sub>yi</sub><sup>2</sup>, (R<sub>b</sub>Ω<sub>i</sub>)<sup>2</sup>)'</b>	27	0,919

Figure 22: Comparaison des lois d'impact stochastiques

#### 4.3.2. Validation de la loi d'impact

L'utilisation de loi d'impact dans un cadre prédictif implique qu'elle doit être valable pour un type de sol et un type de bloc donnés quelle que soit la configuration spatiale du sol. En effet, l'arrangement spatial du sol ne pouvant pas être quantifié sur le terrain, il est indispensable que la loi d'impact construite soit indépendante de ce paramètre : les paramètres de la loi d'impact doivent être constants quel que soit l'arrangement spatial du milieu.

Afin de vérifier cette propriété, les paramètres de la loi d'impact d'ordre 1 sont calculés pour 4 milieux différents (Figure 23) ayant les mêmes propriétés mécaniques et géométriques excepté un arrangement spatial différent des particules.

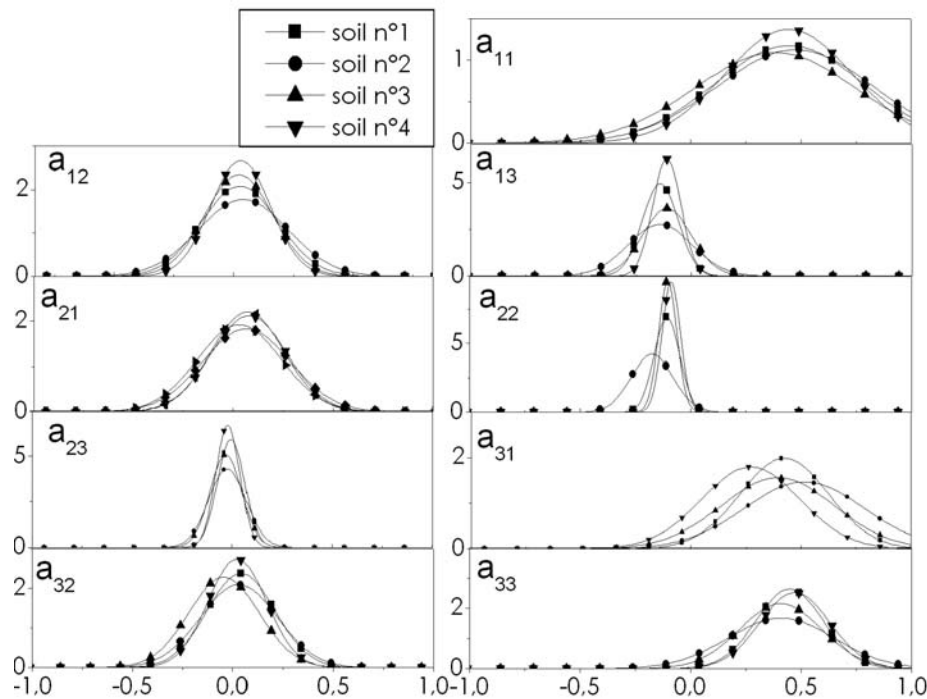


Figure 23: Fonction de répartition des paramètres de la loi d'impact d'ordre 1

Les résultats de ce calcul montrent que la variabilité des paramètres est faible et est essentiellement due à divers phénomènes locaux. Dans ce cas de figure, tous les coefficients de la loi peuvent être considérés indépendants de la configuration spatiale excepté le coefficient  $a_{22}$  qui est sensiblement différent pour le milieu 2.

Les coefficients  $a_{ij}$  sont répartis selon une loi normale de moyenne  $m_{ij}$  et d'écart type  $\sigma_{ij}$ . Par ailleurs, ils sont constants pour un point d'impact donné. Par conséquent, il est possible d'examiner leurs valeurs en chaque point de façon à localiser les points responsables des différences observées (Figure 23). Cette analyse montre que le coefficient  $a_{22}$  est significativement différent aux alentours du point d'impact numéro 20 (Figure 24). Par conséquent, les différences observées pourraient avoir une influence locale.

L'observation de l'arrangement spatial des particules du milieu au niveau de ces points confirme cette hypothèse. En effet, la configuration des particules dans cette région est telle

qu'un amas de petites particules est situé au dessus d'une série de grosses particules. Cet arrangement particulier induit une réflexion partielle de l'énergie sur les grosses particules lors du franchissement de l'interface petites particules/grosses particules. Cela revient observer localement un milieu ayant une paroi horizontale située au niveau de l'interface et, donc, à modifier localement la profondeur effective du milieu.

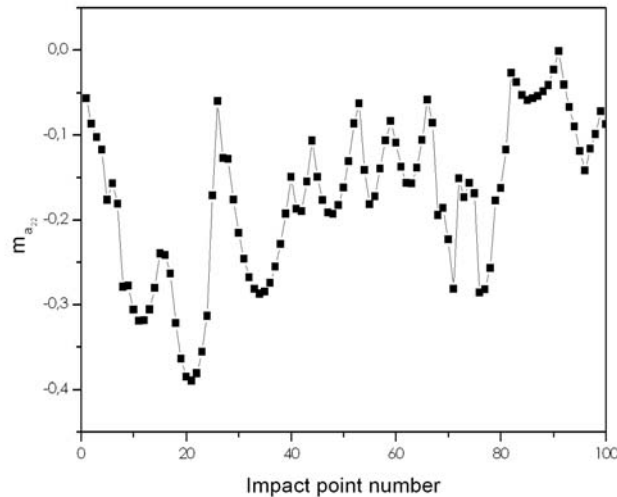


Figure 24 : Evolution du coefficient  $a_{22}$  pour le milieu 2 en fonction du point d'impact

Cet exemple montre clairement que des phénomènes locaux induisant des variations locales des coefficients de la loi d'impact peuvent être identifiés. Ces phénomènes sont très localisés et n'influent que sur certains coefficients de la loi.

#### 4.3.3. Détermination des coefficients de la loi d'impact

Les données issues des simulations sont tout d'abord triées de façon à supprimer les valeurs correspondant au phénomène de masquage ou aux autres phénomènes locaux identifiées précédemment.

Puis, le jeu de données obtenu est traité statistiquement de façon à déterminer les coefficients de la loi d'impact stochastique. Ce traitement permet de définir une valeur unique de chaque paramètre de la loi d'impact pour un milieu et un type de blocs donnés (Figure 25).

	mean	standard deviation		mean	standard deviation
$a_{11}$	0,437	0,337	$a_{23}$	-0,021	0,074
$a_{12}$	0,035	0,184	$a_{31}$	0,401	0,238
$a_{13}$	-0,126	0,100	$a_{32}$	0,012	0,170
$a_{21}$	0,062	0,199	$a_{33}$	0,433	0,183
$a_{22}$	-0,117	0,059			

Figure 25 : Valeurs des paramètres de la loi d'impact stochastique

#### 4.4. Discussion

L'analyse de la loi d'impact obtenue dans des configurations simples permet d'étudier l'accord de celle-ci avec les résultats classiques observés.

Tout d'abord, dans le cas d'un impact normal ( $V_{xi}=0$  and  $\omega_i=0$ ), la moyenne de la vitesse tangentielle restituée est nulle. Cela signifie qu'un bloc arrivant avec une incidence normale sur le milieu est donc en moyenne réfléchi normalement au milieu. Cela correspond au comportement de toute particule impactant un milieu dans ces conditions.

En outre, la vitesse tangentielle restituée est, en grande partie, due à la vitesse tangentielle incidente ainsi qu'à la vitesse de rotation incidente car  $m_{11} > m_{12}$  and  $m_{11} > m_{13}$ . Cela correspond là aussi aux résultats classiques obtenus lors d'essais de terrain (Pfeiffer & Bowen 1989).

Enfin, l'évolution de la vitesse de rotation restituée issue du modèle stochastique est également en accord avec les tendances communément observées. Ainsi, une augmentation de la vitesse de rotation incidente induit une augmentation de la vitesse de rotation restituée. Et, le transfert de la composante tangentielle de la vitesse incidente en vitesse de rotation restituée est également bien traduit car la valeur du coefficient  $m_{33}$  est non négligeable (Pfeiffer & Bowen 1989).

La comparaison du modèle construit par rapport aux modèles issus de travaux antérieurs fournit également des éléments intéressants.

La plupart des modèles utilisés dans les logiciels de trajectographie utilisent un ou deux coefficients pour traduire le phénomène d'impact. Ces coefficients sont basés soit sur la prise en compte des pertes énergétiques soit sur celle des différences de vitesse dans les directions normales et tangentielles à la surface d'impact.

Dans les modèles classiques, la vitesse de rotation est déduite de la composante tangentielle de la vitesse réfléchie par l'intermédiaire d'une relation simple entre ces deux grandeurs et le rayon du bloc.

D'autres modèles d'impact basés sur la théorie de l'impulsion ont également été développés (Dimnet & Fremond 2000). Ces modèles se ramènent, dans les cas simples, à l'utilisation de coefficients de restitution  $R_x$  et  $R_y$  fonctions de la masse et de l'inertie du bloc.

Comme les modèles classiques sont définis pour un type de sol très vaste, les coefficients de restitution sont constants quels que soient la granulométrie et la profondeur du milieu. Cette évaluation générale de leur domaine de validité rend la comparaison de la loi d'impact stochastique avec ces modèles difficile.

Par ailleurs, certains modèles prennent en compte l'influence des caractéristiques du bloc et de la vitesse incidente par pondération des coefficients définis précédemment.

Et, une pondération aléatoire est également parfois apportée aux coefficients déterministes précédents pour traduire le caractère stochastique du phénomène d'impact (voir par exemple Azimi et al. 1982).



L'introduction du caractère statistique du phénomène d'impact ainsi que celle de l'influence de la taille et de la vitesse incidente du bloc est très différente dans la loi définie dans cette étude. Contrairement aux modèles classiques, la loi d'impact stochastique prend directement en compte ces effets durant le calcul des coefficients  $a_{ij}$ .

Malgré les différences majeures observées, on peut exprimer les coefficients de restitution en fonction de ceux de la loi d'impact stochastique.

Les coefficients utilisés usuellement sont (Guzzetti and al. 2002) :

$$R_x = \frac{V_{xr}}{V_{xi}}, R_y = \frac{V_{yr}}{V_{yi}}, R_v = \frac{V_r}{V_i} \text{ and } R_e = \frac{Ec_r}{Ec_i} \quad (15)$$

Avec  $V_r$ = vitesse réfléchies,  $V_i$  = vitesse incidente,  $Ec_r$ = énergie cinétique réfléchie et  $Ec_i$ = énergie cinétique incidente.

Dans notre modèle stochastique, ces coefficients s'expriment ainsi :

$$R_x = a_{11} + a_{12} \frac{V_{yi}}{V_{xi}} + a_{13} \frac{R_b \Omega_i}{V_{xi}} \quad (16)$$

$$R_y = a_{22} + a_{21} \frac{V_{xi}}{V_{yi}} + a_{23} \frac{R_b \Omega_i}{V_{yi}} \quad (17)$$

$$R_v \approx \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{21})V_{xi}^2 + (a_{21} + a_{22})V_{yi}^2 + (a_{31} + a_{32})R^2 \Omega_i^2}{V_{xi}^2 + V_{yi}^2}} \quad (18)$$

$$R_e \approx \frac{f_1(a_{ij})V_{xi}^2 + f_2(a_{ij})V_{yi}^2 + f_3(a_{ij})R^2 \Omega_i^2}{V_{xi}^2 + V_{yi}^2 + \frac{2}{5}R^2 \Omega_i^2} \quad (19)$$

Ces coefficients ont donc un caractère stochastique. Par ailleurs, ils permettent de prendre en compte, contrairement aux coefficients « classiques », une physique plus riche (influence de l'angle d'incidence du bloc, couplage entre les composantes normale, tangentielle et la vitesse de rotation).

## **5. Conclusion et Perspectives**

L'utilisation de la Méthode des Eléments Discrets a permis une compréhension satisfaisante des phénomènes en jeu lors de l'impact d'un bloc sur un éboulis.

L'étude statistique complète des résultats a par ailleurs permis la définition d'une loi d'impact stochastique performante.

La comparaison des résultats issus de cette loi avec les résultats issus de la littérature montre son adéquation avec la réalité dans le cadre de l'étude. Par ailleurs, l'étude comparative de la loi obtenue avec les lois classiques utilisées en trajectographie met en évidence les relations directes entre les coefficients de la loi et les coefficients de restitution classiques. Contrairement aux modèles classiques, la loi définie inclut directement les effets simples ou couplés des divers paramètres. La nature stochastique de l'impact est aussi prise directement en compte par cette loi.

La méthodologie conduisant à la construction d'une loi d'impact stochastique pertinente ayant été définie, une phase de simulation numérique intensive peut être amorcée de façon à étudier l'influence sur la loi d'impact de paramètres identifiés lors d'essais préliminaires (taille relative du bloc par rapport aux pierres de l'éboulis, forme des particules de l'éboulis, profondeur du sol...).

Par ailleurs, la validation expérimentale de la loi d'impact stochastique est une étape déterminante. Dans cette optique, les travaux futurs vont être essentiellement consacrés au développement d'essais de laboratoire et de terrain pertinents. Les objectifs principaux de ces travaux sont la mise en place de montages expérimentaux assurant la quantification efficace de l'impact ainsi que la réalisation d'une campagne d'essais de validation de la loi d'impact stochastique.

## 6. Références

- Azimi, C.; Desvareux, P.; Giraud, A. ; Martin-Cochet J.; Rochet, L. 1982. Méthode de calcul de la dynamique des chutes de blocs, application à l'étude du versant de la montagne de la Pale (Vercors). *Bull. Liaison de Ponts-et-Chaussées* 122: 93-102.
- Azzoni, A.; Rossi P.P.; Drigo E. ; Giani G.P.; Zaninetti A. 1991. In situ observations of rockfalls analysis parameters. In Bell (ed.), *Landslides*: 307-314. Rotterdam: Balkema.
- Bagi, K. 2005. An algorithm to generate random dense arrangements for discrete element simulations of granular assemblies. *Granular matter* 7: 31-43.
- Berthet-Rambaud, P. 2004. Structures rigides soumises aux avalanches et chutes de blocs: modélisation du comportement mécanique et caractérisation de l'interaction « phénomène-ouvrage », *Thèse de Doctorat, Cemagref – Groupement de Grenoble* :
- Cundall, P.A. & Strack, O.D.L. 1979. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29: 47-65.
- Calvetti, F. 1998. Distinct Element evaluation of the rock-fall design load for shelters. *Rivista Italiana di geotecnica* 32-3: 63-83.
- Dimnet, E. & Fremond, M. 2000. Instantaneous collisions of solids. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona: 11-17.
- Goodman, R.E. 1980. *Introduction to rocks mechanics*. Boston: PWS Publishing Company.
- Guzzetti, F.; Crosta, G.; Detti, R.; Agliardi F. 2002. STONE: a computer program for the three dimensional simulation of rock-falls. *Computer & Geosciences* 28: 1079-1093.
- Hostler, S.R. & Brennen C.E. 2005. Pressure wave propagation in granular bed. *Phys. Rev. E* 72(3)031303: 1-13.
- Itasca Consulting Group. 1999. PFC2D User's manual. Minneapolis: 1999
- Kirkby, M.J. & Statham I. 1975. Surface movement and scree formation. *Journal of geology* 83: 349-362.
- Laouafa, S. & Nicot, F. 2003. Modélisation numérique de l'impact d'un bloc rocheux sur un sol composé d'éboulis. *Revue Française de Géotechnique* 109: 87-97.
- Mindlin, R.D. & Deresiewicz, H. 1953. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of Applied Mechanics* 20: 327-344.
- Pfeiffer, T.J. & Bowen, T.D. 1989. Computer simulations of rockfalls. *Bulletin of the Association of Engineering Geologists* 26: 135-146.